HOJA DE EJERCICIOS 5
Análisis Matemático.
CURSO 2017–2018.

Problema 1. En cada uno de los tres casos siguientes, demuestra que la función f que se da es de clase C^1 y calcula su diferencial en el punto general (x, y).

a) Sea $g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua y $g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Se define $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(x, y) = \int_0^x g_1(t, 0)\, dt + \int_0^y g_2(x, t)\, dt\,.$$

b) Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y $a \in \mathbb{R}$. Se define $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(x, y) = \int_a^{x+y} g(s)\, ds\,.$$

c) Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y $a \in \mathbb{R}$. Se define $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(x, y) = \int_a^{xy} g(s)\, ds\,.$$

Problema 2.

a) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable y tal que $Df(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que f es constante.
Indicación: evalúa f a lo largo de caminos diferenciables.

b) Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciable y tal que $Df(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Fijado un punto $x_0 \in U$, demuestra que el conjunto

$$\{x \in U : f(x) = f(x_0)\}\,,$$

es abierto y cerrado relativo de U. Usa eso para concluir que si U es conexo por caminos entonces f es constante. ¿Y si U no es conexo por caminos?

Problema 3. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$, visto como función:

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad F(x, y) \ = \ \langle x, y \rangle\,.$$

a) Halla la jacobiana en el punto general $DF(a, b)$.

b) Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ son diferenciables y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define por $h(t) = F(f(t), g(t))$, calcula $h'(t)$.

c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ diferenciable. Demuestra que la longitud euclídea $\|f(t)\|$ es constante si y sólo si los vectores $f(t)$ y $f'(t)$ son ortogonales para todo $t \in \mathbb{R}$. *Indicación:* Considera $\|f(t)\|^2$.

Problema 4. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1. Demuestra que si

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\, \xi_i\, \xi_j > 0 \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n \text{ y todo } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,,$$

entonces f es inyectiva.
Indicación: Fijados $x, y \in \mathbb{R}^n$, estudia la función

$$g(t) \ = \ \big\langle\, f\big(\, tx + (1-t)y\,\big)\,,\, x - y\,\big\rangle \ , \quad t \in [0, 1]\,.$$

Puede ser de ayuda el apartado b) del ejercicio 3.

Problema 5. Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, homogénea de grado $m \in \mathbb{N}$ y diferenciable en todo punto, demuestra que cumple la **identidad de Euler:**

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = m\, f(x) \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Problema 6. a) Demuestra que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es positivamente homogénea de grado $p < 1$, con $f(0) = 0$ pero no idénticamente nula, entonces f no es diferenciable en 0.

b) Demuestra que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es positivamente homogénea de grado 1 y diferenciable en $\mathbf{0}$ entonces es lineal. ¿Hay alguna norma que sea diferenciable en $\mathbb{R}^n$?

Problema 7. Sean $a \in \mathbb{R}^n$ y $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal. Calcula la diferencial de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en $x \in \mathbb{R}^n$ para cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x) = \|x\|^4$.

b) $f(x) = \langle a, x \rangle$.

c) $f(x) = \langle x, L(x) \rangle$.

Problema 8. Calcula la diferencial de $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ para cada uno de los siguientes casos:

a) Tomamos $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal y definimos $f(x, y) = \langle x, L(y) \rangle$.

b) f es bilineal.

c) $n = 2$ y $f = \det$, es decir $f(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.

Problema 9. De las siguientes fórmulas dí, razonadamente, cuáles son verdad y cuáles falsas (cerca del origen en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{R}^2$).

$x + 7x^3 = \mathrm{O}(\|x\|)$	$xy = \mathrm{O}(x^2 + y^2)$	$xy = \mathrm{o}(x^2 + y^2)$	$\operatorname{sen} x = \mathrm{O}(\|x\|)$	$x \operatorname{sen} y = \mathrm{O}(x^2 + y^2)$
$\operatorname{sen} x = \mathrm{o}(\|x\|)$	$\cos x = \mathrm{O}(\|x\|)$	$1 - \cos x = \mathrm{O}(x^2)$	$\dfrac{x}{\log \|x\|} = \mathrm{o}(\|x\|)$	$\dfrac{x}{\log \|x\|} = \mathrm{O}(\|x\|^{0'99})$

Problema 10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Calcula las funciones f_x, f_y. Comprueba que $D_{21}f(0, 0) \neq D_{12}f(0, 0)$.

Problema 11. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$, $f(a) = 0$ y g es continua en a, prueba que la función $F(x) = f(x)g(x)$ es diferenciable en a y $DF(a) = g(a)Df(a)$.
